Guía de Aprendizaje
para I Medio

SISTEMAS DE ECUACIONES

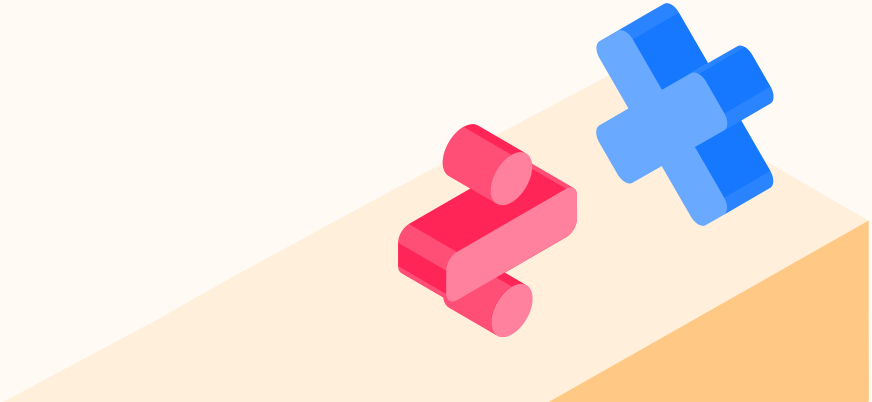
OBJETIVO

OA 4: Resolver sistemas de ecuaciones lineales (2x2) relacionados con problemas de la vida diaria y de otras asignaturas, mediante representaciones gráficas y simbólicas.

HABILIDADES

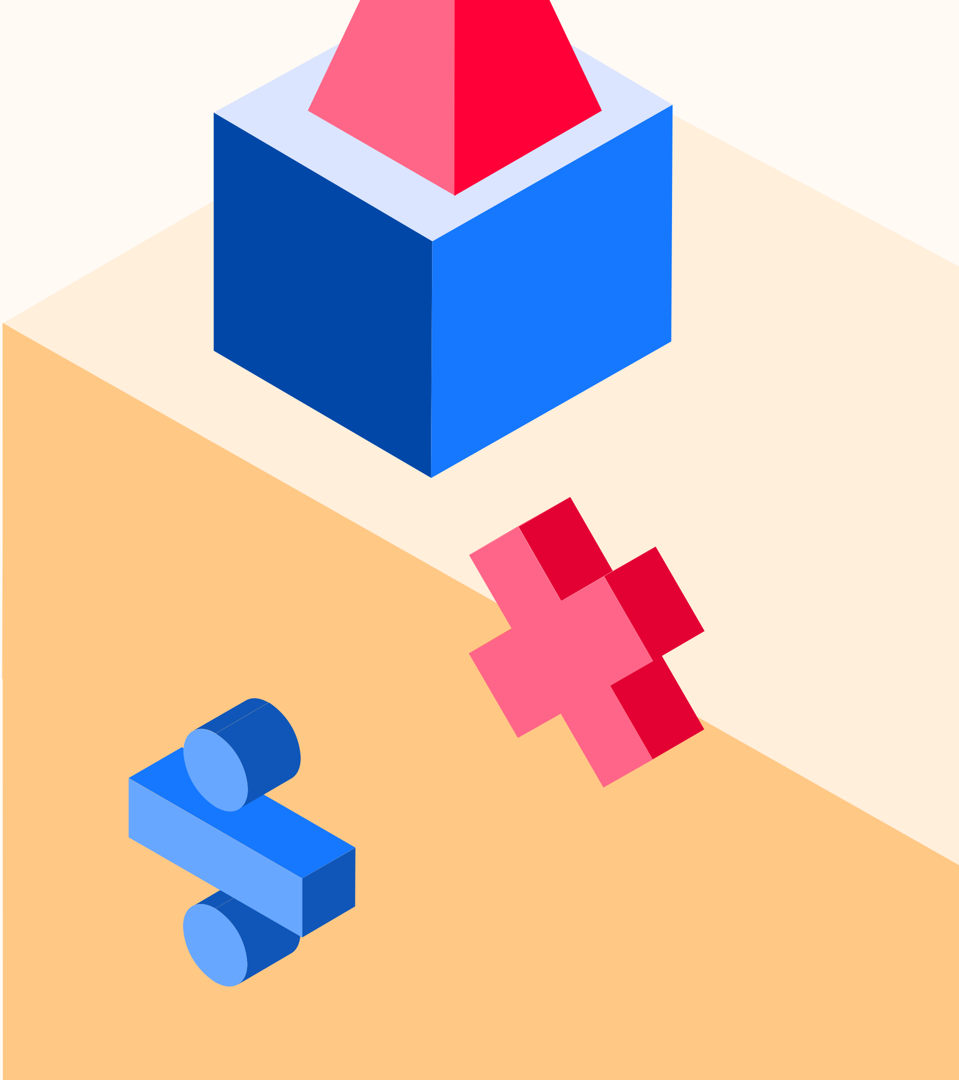
En esta guía debes desarrollar las siguientes habilidades:

- Construir y evaluar estrategias para resolver problemas no rutinarios
- Argumentar, utilizando lenguaje simbólico y diferentes representaciones, para justificar la veracidad o falsedad de una conjetura, y evaluar el alcance y los límites de los argumentos.



01

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES



ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON DOS INCOGNITAS

- Una **ecuación de primer grado con dos incógnitas** es una ecuación de grado 1 que tiene dos incógnitas $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ se puede representar de la forma $\boldsymbol{ax} + \boldsymbol{by} = \boldsymbol{e}$, donde $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{e}$ son coeficientes reales.
- Toda la ecuación de primer grado con dos incógnitas tiene **infinitas soluciones**. Las soluciones de esta ecuación se representan como **pares ordenados** de números reales: $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$. El conjunto solución de todos los pares ordenados de números reales que satisfacen la ecuación $\boldsymbol{ax} + \boldsymbol{by} = \boldsymbol{e}$ se denotara:

$$\boldsymbol{S} = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^{2}: \boldsymbol{ax} + \boldsymbol{by} = \boldsymbol{e}\}$$

- La **gráfica** que representa una ecuación de primer grado con dos incógnitas corresponde a una **recta**.

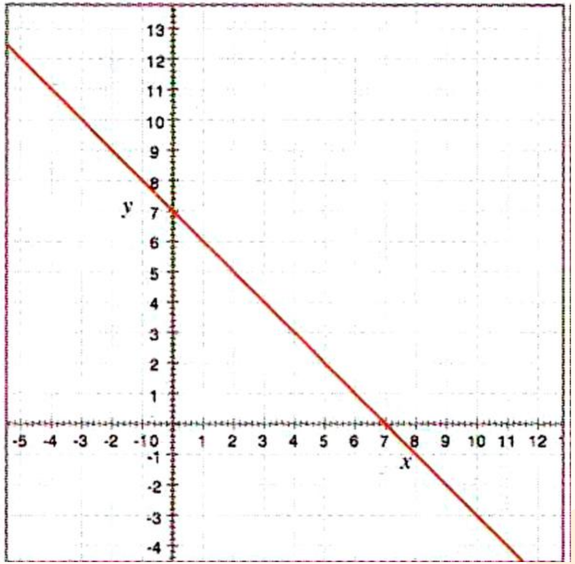
ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON DOS INCOGNITAS

Ejemplo

Las soluciones de la ecuación $x + y = 7$, son todos los pares de números reales que suman 7. Así, los pares $(1, 6), (-12, 19), (-1, 8)$, entre otros, son soluciones de la ecuación. El conjunto solución de esta ecuación esta dado por:

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 7\}$$

Para observar la gráfica de la ecuación $x + y = 7$, se puede interpretar como $y = -x + 7$, donde $m = -1$ (valor de la pendiente) y $n = 7$ (coeficiente de posición).



SISTEMAS DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO

Un **sistema de ecuaciones de primer grado** es un conjunto de dos o más ecuaciones de primer grado (grado 1), en las cuales aparecen una o varias incógnitas.

Ejemplos

Los siguientes son sistemas de ecuaciones de primer grado:

1. $$\left.\begin{array}{l} x + y - z = 8 \\ 2x - y = 12 \end{array}\right\rfloor$$

▶ 2 ecuaciones, 3 incógnitas.

2. $$\left.\begin{array}{l} 2x - 8y + z = -5 \\ x + 2y = 1 \\ x - z = 6 \end{array}\right\rfloor$$

▶ 3 ecuaciones, 3 incógnitas.

SISTEMAS DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO

Sistemas de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas

Los sistemas en los que el número de ecuaciones coincide con el de las incógnitas se denominan cuadrados. Un caso interesante de **sistemas cuadrados** es el de **dos ecuaciones con dos incógnitas**, siendo su representación algebraica la siguiente:

$$\begin{array}{l} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{array}$$

, donde $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{e}$ y $\boldsymbol{f}$ son coeficientes reales.

Representación gráfica de un sistema de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas

Cada ecuación de un sistema se puede representar gráficamente por una recta. Por lo tanto, resolver gráficamente un sistema de primer grado con dos incógnitas consiste en encontrar un punto $P(x, y)$ que representa la **intersección de las rectas**, es decir, las posibles soluciones de un sistema de ecuaciones. Luego, en un sistema se pueden dar los siguientes casos:

SISTEMAS DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO

- Las rectas se **intersectan en un punto**, es decir, las rectas son **secantes** (única solución), se le conoce como un sistema **compatible determinado**.
- Las rectas se **intersectan en infinitos puntos**, es decir, las rectas son **coincidentes** (infinitas soluciones), se le conoce como un sistema **compatible indeterminado**.
- Las rectas **no se intersectan**, es decir, las rectas **paralelas** (no hay solución), se le conoce como un sistema **incompatible**.

Tener presente. Según los coeficientes del sistema, se tiene:

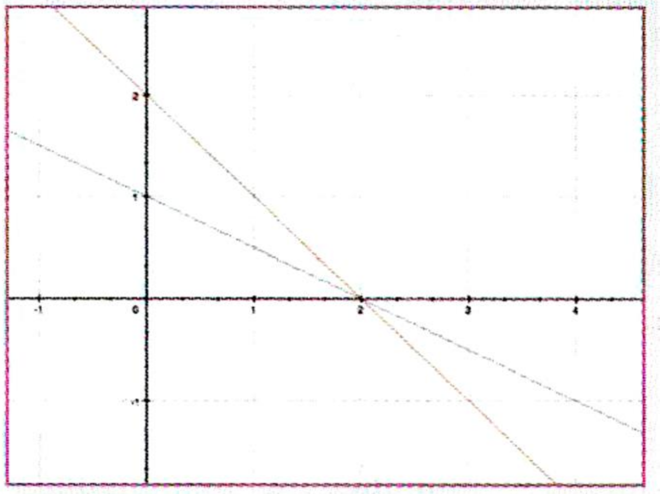
$$\begin{aligned} ax + by &= e \\ cx + dy &= f \end{aligned}$$

- Incompatible: $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} \neq \frac{e}{f}$
- Compatible determinado: $\frac{a}{c} \neq \frac{b}{d}$
- Compatible indeterminado: $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{e}{f}$

SISTEMAS DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO

Rectas secantes

El sistema $\begin{array}{r} x + y = 2 \\ x + 2y = 2 \end{array}$ se representa gráficamente por:

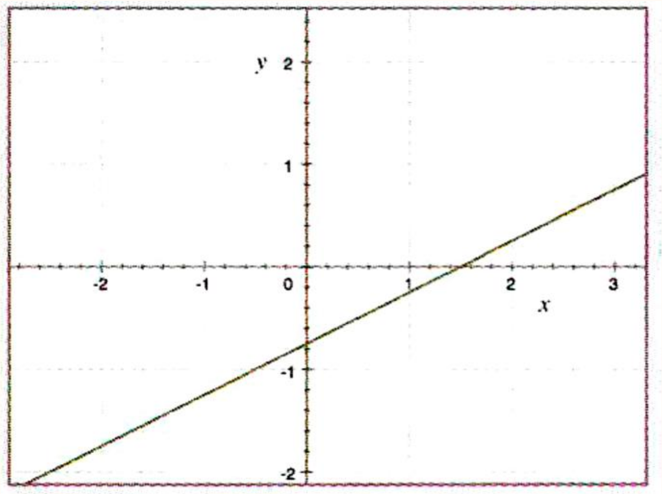


Luego, la solución de este sistema es el punto $(2, 0)$. Su conjunto solución se representa por: $S = \{(2, 0)\}$.

SISTEMAS DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO

Rectas coincidentes

El sistema $\begin{cases} 2x - 4y = 3 \\ 4x - 8y = 6 \end{cases}$ se representa gráficamente por:

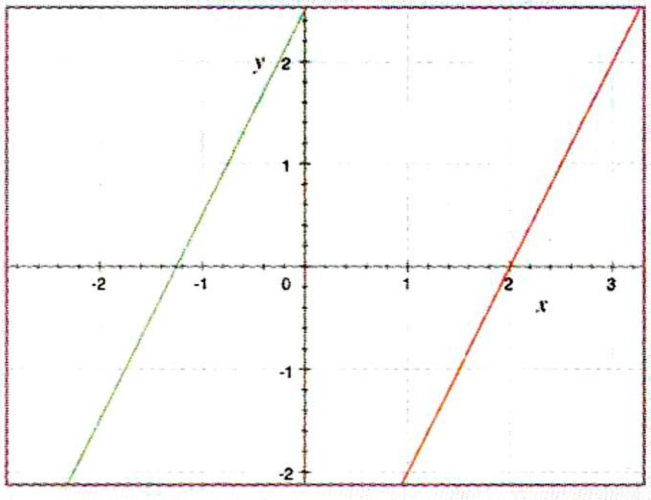


Como las rectas son coincidentes, el sistema tiene infinitas soluciones. Su conjunto solución se representa por: $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x - 4y = 3\}$.

SISTEMAS DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO

Rectas paralelas

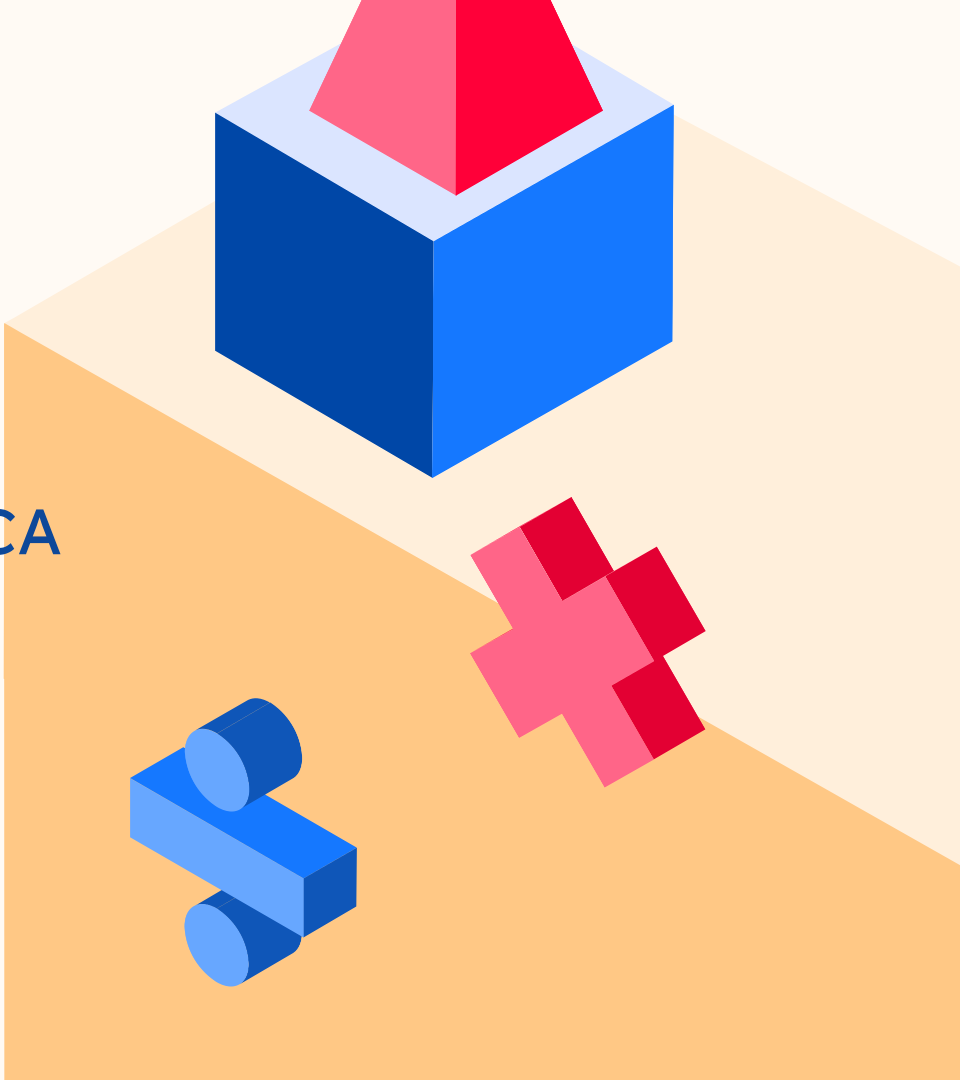
El sistema $\begin{aligned} 2x - y &= 4 \\ -4x + 2y &= 5 \end{aligned}$ se representa gráficamente por:



La solución de este sistema es vacía, ya que las rectas paralelas. Su conjunto solución se representa por: $S = \emptyset$.

02

RESOLUCION ALGEBRAICA DE SISTEMAS DE ECUACIONES



RESOLUCION ALGEBRAICA

Resolver un sistema de ecuaciones con dos incógnitas consiste en determinar los pares ordenados (x, y) que satisfacen cada una de las ecuaciones del sistema. A continuación, se revisarán los principales procedimientos para resolver este tipo de sistemas.

METODO DE SUSTITUCION

1. Despejar una de las incógnitas en función de la otra, en una de las ecuaciones.
2. La expresión obtenida se sustituye en la otra ecuación, obteniendo una ecuación de grado 1 con una incógnita.
3. Resolver la ecuación con una incógnita.
4. Calcular el valor de la otra incógnita remplazando en las ecuaciones originales o en alguna de las ecuaciones equivalentes a estas que se hayan obtenido en el proceso.

Ejemplo

Resolver el sistema:

$$\begin{aligned} 9x + 2y &= 11 \\ x - 4y &= 8 \end{aligned} \quad \blacktriangleright \quad \begin{aligned} \langle 1 \rangle \ 9x + 2y &= 11 \\ \langle 2 \rangle \quad x - 4y &= 8 \end{aligned}$$

METODO DE SUSTITUCION

1. Despejar la incógnita x de la ecuación $\langle 2 \rangle$. Se obtiene la ecuación:
   $\langle 3 \rangle \; x = 4y + 8.$
2. La ecuación $\langle 3 \rangle$ se remplaza en la expresión de la ecuación $\langle 1 \rangle$, obteniendo la ecuación $9(4y + 8) + 2y = 11.$
3. Se resuelve la ecuación anterior de primer grado con incógnita y:
   $$36y + 72 + 2y = 11$$
   $$38y = 11 - 72 \iff 38y = -61 \; \blacktriangleright \; y = -\frac{61}{38}$$
4. El valor de y se remplaza en la expresión de la ecuación $\langle 2 \rangle$, para obtener el valor de la incógnita x, obteniéndose la ecuación.
   $$x - 4 \cdot \left(-\frac{61}{38}\right) = 8$$
   $$x + \frac{244}{38} = 8 \iff x = 8 - \frac{244}{38} = \frac{60}{38} = \frac{30}{19} \; \blacktriangleright \; x = -\frac{30}{19}$$
   Luego, la solución del sistema es el par ordenado $\left(\frac{30}{19}, -\frac{61}{38}\right)$.
   El conjunto solución del sistema se denota por: $S = \left\{\left(\frac{30}{19}, -\frac{61}{38}\right)\right\}$.

METODO DE IGUALACION

1. Despejar la misma incógnita en ambas ecuaciones.
2. Igualar las dos expresiones obtenidas en el paso 1, generando una ecuación de grado 1 con una incógnita.
3. Resolver la ecuación lineal resultante.
4. Calcular el valor de la otra incógnita remplazando en las ecuaciones originales o en alguna de las ecuaciones equivalentes a estas que se hayan obtenido en el proceso.

Ejemplo

Resolver el sistema:

$$5x - 4y = -7$$
$$2x + 2y = -10$$

$$\langle 1 \rangle\ 5x - 4y = -7$$
$$\langle 2 \rangle\ 2x + 2y = -10$$

METODO DE IGUALACION

1. Se despeja x en ambas ecuaciones. Entonces, de $\langle 1 \rangle$ se tiene que $x = \frac{4y-7}{5}$, y de $\langle 2 \rangle$, $x = -y - 5$.
2. Se igualan ambas expresiones, obteniéndose la ecuación: $\frac{4y-7}{5} = -y - 5$.
3. La solución es ▶ $y = -2$
4. El valor de y se remplaza en la ecuación $x = -y - 5$. Se tiene,
   $x = -y - 5 = -(-2) - 5 = -3$ ▶ $x = -3$

Luego, el conjunto solución del sistema es: $S = \{(-3, -2)\}$.

METODO DE REDUCCION

1. Amplificar o simplificar cada ecuación para obtener, en una de las incógnitas, coeficientes iguales o que difieran solo en el signo.
2. Restar o sumar las ecuaciones de manera de eliminar una de las incognitas.
3. Resolver la ecuación lineal resultante.
4. Calcular el valor de la otra incógnita remplazando en las ecuaciones originales o en alguna de las ecuaciones equivalentes a estas que se hayan obtenido en el proceso.

Ejemplo

Resolver el sistema:

$$2x - 5y = 11$$
$$3x + 2y = 7$$

$$\langle 1 \rangle\ 2x - 5y = 11$$
$$\langle 2 \rangle\ 3x + 2y = 7$$

METODO DE REDUCCION

1. Se igualará el coeficiente de la incógnita x. Para esto, amplificar la ecuación $\langle 1 \rangle$ por 3 y la ecuación $\langle 2 \rangle$ por -2. Entonces se tiene:
   $\langle 1 \rangle\ 2x - 5y = 11 \quad /\cdot 3 \qquad \langle 1*\rangle\ 6x - 15y = 33$
   $\langle 2 \rangle\ 3x + 2y = 7 \quad /\cdot (-2) \qquad \langle 2*\rangle\ -6x - 4y = -14$
2. Sumar las ecuaciones $\langle 1*\rangle$ y $\langle 2*\rangle$.
   $$\begin{aligned} 6x - 15y &= 33 \\ -6x - 4y &= 14 \\ 0 - 19y &= 19 \end{aligned}$$
3. Resolver la ecuación: $-19y = 19$ ▶ $y = -1$
4. Reemplazar el valor de y en la ecuación $\langle 1 \rangle$.
   $2x - 5 \cdot (-1) = 11$ ▶ $x = \frac{11-5}{2} = \frac{6}{2} = 3$ ▶ $x = 3$
   Por lo tanto, el conjunto solución del sistema es: $S = \{(3, -1)\}$.

EJERCICIO RESUELTO

Un padre reparte entre sus dos hijos $66.000. Al hijo mayor le da la mitad que al hijo menor. ¿Cuánto dinero recibe cada hijo?

La situación se puede representar mediante el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{rl} x + y = 66.000 & (1) \\ 2x - y = 0 & (2) \end{array}$$

donde $\boldsymbol{x}$ representa la cantidad recibida por el hijo mayor e $\boldsymbol{y}$ el dinero recibido por el hijo menor. De la ecuación $\langle \mathbf{1} \rangle$ se despeja y, resultando $y = -x + 66000$, y esta expresión se remplaza en la ecuación $\langle \mathbf{2} \rangle$.

$$\begin{aligned} 2x - (-x + 66.000) &= 0 \\ 2x + x - 66.000 &= 0 \qquad / + 66.000 \\ 3x &= 66.000 \qquad / \cdot \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad x = 22.000 \end{aligned}$$

Al reemplazar $x = 22000$ en la es

EJERCICIO RESUELTO

Un padre reparte entre sus dos hijos \$ 66.000. Al hijo mayor le da la mitad que al hijo menor. ¿Cuánto dinero recibe cada hijo?

Resolución: La situación se puede representar mediante el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 66.000 \\ 2x - y = 0 \end{array}\right| \begin{array}{l} \textbf{(1)} \\ \textbf{(2)} \end{array}$$

donde **x** representa la cantidad recibida por el hijo mayor e **y** el dinero recibido por el hijo menor.

De la ecuación **(1)** se despeja **y**, resultando: $y = -x + 66.000$, y esta expresión se remplaza en la ecuación **(2)**.

$$2x - (-x + 66.000) = 0$$

$$2x + x - 66.000 = 0 \qquad / + 66.000$$

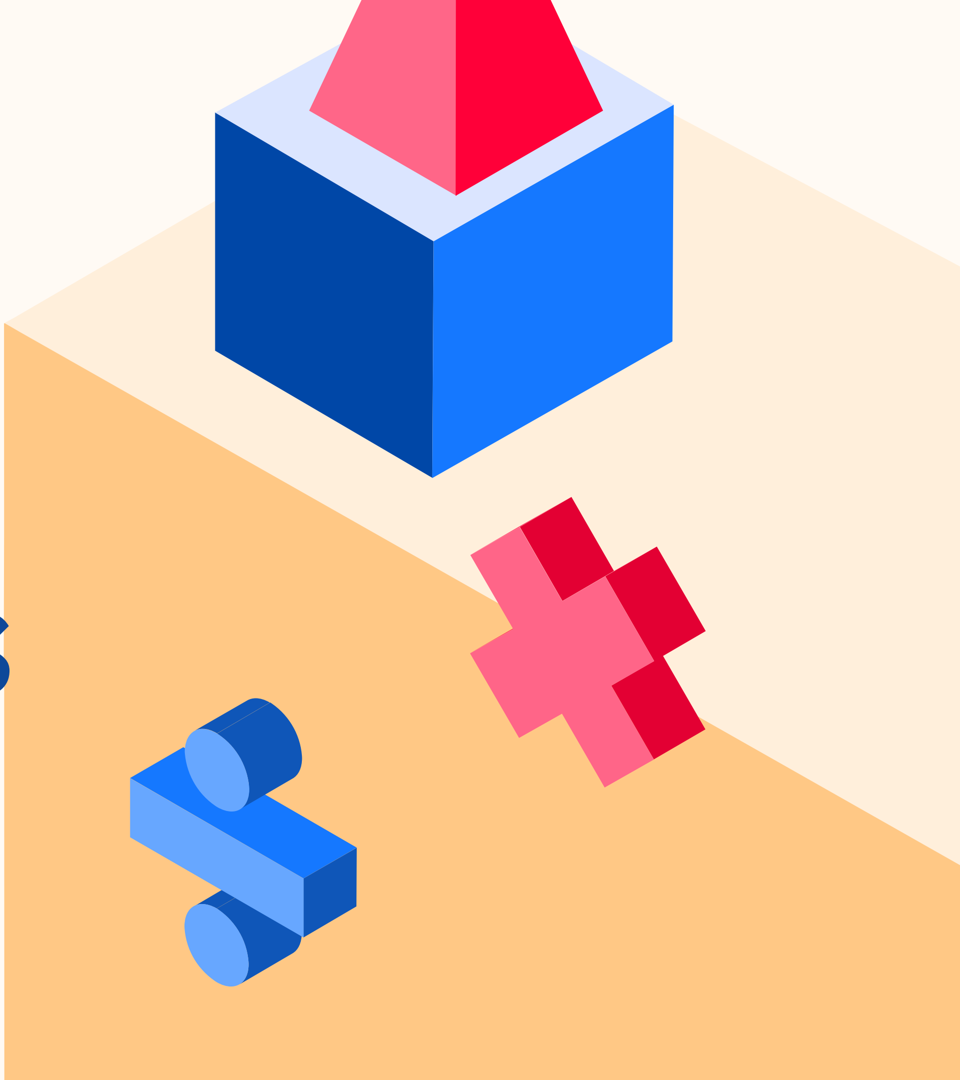
$$3x = 66.000 \qquad / \cdot \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad x = 22.000$$

Al remplazar $x = 22.000$ en la expresión $y = -x + 66.000$ se obtiene: $y = -22.000 + 66.000 = 44.000$.

Respuesta: El hijo mayor recibe \$ 22.000 y el hijo menor recibe \$ 44.000.

03

ACTIVIDADES



ACTIVIDADES

1. Resuelve cada sistema de ecuaciones.

a) $\begin{cases} 2x - y = 13 \\ x + y = -1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + 2y = -2 \\ x + y = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x + 3y = -9 \\ y = -x - 3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y + 3x = -13 \\ \frac{5}{3}y - 5x = -\frac{5}{3} \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x - 3y + 10 = 0 \\ 4y + 20 = 6x \end{cases}$

f) $\begin{cases} y - 2x = -6 \\ y = \frac{5}{3}x - 5 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 12x + y = -70 \\ -6x + y = 38 \end{cases}$

h) $\begin{cases} x - 3y = -21 \\ 3x + 14y = 121 \end{cases}$

ACTIVIDADES

2. En un cine, 2 niños y 2 adultos pagan $10.000, y un niño y 4 adultos pagan $17.000. ¿Cuál es el precio de la entrada de adulto y la de niño?
3. Guillermo cambió $66.610 en moneda extranjera. Recibió por ese monto 40 francos y 50 libras. Más tarde, cambió $145.100 y recibió 100 francos y 100 libras. ¿A qué valor, en pesos cotizó Guillermo el franco y la libra?
4. La medida del largo de un rectángulo es el doble de la medida de su ancho, y su perímetro es 30 cm. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?
5. Entre Diana y Martín ahorro $150.000. Si Diana reunió el triple de lo que logro juntar Martín, ¿cuánto dinero tiene cada uno?
6. Ana María ahorro $115.000 en billetes de $2.000 y de $5.000. Si tiene 32 billetes en total, ¿cuántos corresponden a cada denominación?

NOS VEMOS PRONTO!

Si tienes alguna pregunta, escríbeme a

gonzalohueitra@cnslourdes.cl